

Formule utili di Analisi I

Sandro Sigala <sandro@sigala.it>

8 dicembre 2001

1 Numeri complessi

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$z = (x, y) = x + iy \text{ (con } i^2 = -1)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} (\cos \operatorname{Im} z + i \sin \operatorname{Im} z)$$

$$\rho e^{i\vartheta} = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \Rightarrow e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

Siano $w, z \in \mathbb{C}$, $w^n = z$. Dato $z = \rho e^{i\vartheta}$ allora con $k = 0, \dots, n-1$, gli n numeri w_k dati da

$$w_k = r e^{i\varphi_k}, \quad r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$$

sono tutte radici n -esime di z .

2 Funzioni e domini

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$f: \begin{cases} \text{pari} & \text{se } f(-x) = f(x) \\ \text{dispari} & \text{se } f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

Sviluppo con esponenziale delle funzioni trigonometriche:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \tan z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} & \cot z &= i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \tanh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \coth z &= \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \end{aligned}$$

Domini delle funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 \cos x : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] & \arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\
 \sin x : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] & \arcsin x : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\
 \tan x : \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\pi + k\pi, \forall k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow \mathbf{R} & \arctan x : \mathbf{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\
 \cot x : \mathbf{R} \setminus \{k\pi, \forall k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow \mathbf{R} & \operatorname{arccot} x : \mathbf{R} \rightarrow]0, \pi[\\
 e^x : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[& \log x :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}
 \end{array}$$

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

$$\operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

$$f^+ = \max(f, 0) \quad f^- = \max(-f, 0)$$

2.1 Proprietà delle funzioni trigonometriche

$$\cos -x = \cos x \quad \sin -x = -\sin x$$

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \Rightarrow \cos z = \pm \sqrt{1 - \sin^2 z} \Rightarrow \sin z = \pm \sqrt{1 - \cos^2 z}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \Rightarrow \cosh z = \pm \sqrt{1 + \sinh^2 z} \Rightarrow \sinh z = \pm \sqrt{\cosh^2 z - 1}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \quad \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \quad \sin x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$\cosh x = \pm \sqrt{\frac{\cosh 2x + 1}{2}} \quad \sinh x = \pm \sqrt{\frac{\cosh 2x - 1}{2}}$$

$$\operatorname{set} \cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \operatorname{set} \sinh x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

2.2 Proprietà della funzione logaritmo

Sia $a^x = b$, allora $x = \log_a b$ (con $a > 0, b > 0$).

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$k \log_a x = \log_a x^k$$

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (\text{cambiamento di base})$$

3 Limiti

Limiti notevoli:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (\forall a \in \mathbf{R})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0 \quad (\forall \alpha > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log |x| = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$$

Velocità di n con $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} 1: & n^n \\ 2: & n! \\ 3: & a^n \quad \text{con } n > 1 \\ 4: & n^k \quad \text{con } k > 0 \\ 5: & (\log n)^\beta \quad \text{con } \beta > 0 \end{aligned}$$

Sostituzioni di funzioni per $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim x \quad \cos x \sim 1 \quad \tan x \sim x$$

$$\sinh x \sim x \quad \cosh x \sim 1$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \log(1+x) \sim x$$

Definizione di *o piccolo*:

$$f = o(g) \text{ per } x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Dalla definizione si hanno:

$$o(g) + o(g) = o(g), \quad o(cg) = o(g), \quad o(g + o(g)) = o(g), \quad o(f)o(g) = o(fg).$$

4 Serie

Serie fondamentali:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ con } |z| < 1$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ per } -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ per } -1 \leq x \leq 1$$

Serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} : \begin{cases} \text{converge} & \text{per } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{per } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Serie geometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n : \begin{cases} \text{converge} & \text{per } |z| < 1 \\ \text{diverge} & \text{per } |z| > 1 \text{ o } z = 1 \\ \text{oscilla} & \text{per } |z| = 1 \text{ e } z \neq 1. \end{cases}$$

5 Derivate

Derivate fondamentali:

$$\mathbf{D} f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\mathbf{D} f(g) = f'(g)g'$$

$$\mathbf{D} fg = f'g + fg'$$

$$\mathbf{D} \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2} \Rightarrow \mathbf{D} \frac{1}{g} = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\mathbf{D} c = 0$$

$$\mathbf{D} x^n = nx^{n-1} \Rightarrow \mathbf{D} x = 1$$

$$\mathbf{D} |x| = \text{sign } x \quad \mathbf{D} \text{sign } x = 0$$

$$\mathbf{D} \cos x = -\sin x$$

$$\mathbf{D} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{D} \sin x = \cos x$$

$$\mathbf{D} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{D} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\mathbf{D} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathbf{D} \cot x = \frac{1}{-\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

$$\mathbf{D} \text{arccot } x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathbf{D} \cosh x = \sinh x$$

$$\mathbf{D} \text{set } \cosh x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{D} \sinh x = \cosh x$$

$$\mathbf{D} \text{set } \sinh x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathbf{D} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\mathbf{D} \text{set } \tanh x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathbf{D} \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

$$\mathbf{D} \text{set } \coth x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\mathbf{D} e^x = e^x$$

$$\mathbf{D} \log x = \frac{1}{x}$$

6 Integrali

Integrazione per parti:

$$\int_a^b f(t)'g(t)dt = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Integrazione per sostituzione:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Sostituzioni utili:

$$\begin{aligned}
 \int f(e^x) dx & \quad e^x = t \\
 \int \frac{1}{x} f(\log x) dx & \quad \log x = t \\
 \int f(\sin x, \cos x) dx & \quad \tan \frac{x}{2} = t \\
 \int f(\tan x) dx & \quad \tan x = t \\
 \int \sqrt{1-x^2} dx, \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx & \quad x = \sin t \\
 \int \sqrt{1+x^2} dx, \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx & \quad x = \sinh t \\
 \int \sqrt{x^2-1} dx, \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx & \quad x = \cosh t
 \end{aligned}$$

Integrali immediati:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \log |f(x)| + c \\
 \int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} dx &= \sqrt{f(x)} + c \\
 \int f'(x)(f(x))^\alpha dx &= \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \\
 \int e^{f(x)} f'(x) dx &= e^{f(x)} + c
 \end{aligned}$$

Integrali impropri fondamentali:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1. \end{cases} \\
 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases} \\
 \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases} \\
 \int_0^{1/2} \frac{1}{x|\log x|^\alpha} dx &= \begin{cases} \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

7 Polinomi di Taylor

Formula di Taylor con il resto di Peano:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o(x-a)^n \quad \text{per } x \rightarrow a.$$

Sviluppi in serie di Taylor di funzioni fondamentali:

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

8 Equazioni differenziali

8.1 Equazioni differenziali del primo ordine

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' + a(t)u = b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

la soluzione è data da

$$u(t) = e^{-A(t)} \left[u_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds \right] \quad \text{con } A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

8.2 Equazioni differenziali del secondo ordine

Data l'equazione omogenea

$$u'' + au' + bu = 0 \quad (1)$$

è necessario risolvere l'equazione caratteristica

$$z^2 + az + b = 0$$

trovando le radici z_1 e z_2 . Si hanno tre casi:

1. $z_1 = \lambda - i\mu, z_2 = \lambda + i\mu$ (con $\mu \neq 0$). Le soluzioni dell'equazione sono le funzioni della forma

$$e^{\lambda t}(c_1 \sin(\mu t) + c_2 \cos(\mu t));$$

2. $z_1, z_2 \in \mathbf{R}, z_1 \neq z_2$. Le soluzioni sono le funzioni della forma

$$c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t};$$

3. $z_1 = z_2 = \lambda \in \mathbf{R}$. Le soluzioni sono della forma

$$e^{\lambda t}(c_1 t + c_2).$$

Nel caso si abbia un'equazione non omogenea del tipo:

$$u'' + au' + bu = P(t)e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad \text{oppure} \quad u'' + au' + bu = P(t)e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad (2)$$

(con P polinomio di grado n). Si considera allora il numero complesso $\xi = \alpha + i\beta$. Si hanno tre casi:

1. ξ non è soluzione dell'equazione caratteristica $z^2 + az + b = 0$ (ovvero $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ non è soluzione di (1)). In questo caso si cerca una soluzione del tipo

$$w(t) = e^{\alpha t}(Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)),$$

con Q_1 e Q_2 polinomi di grado n da determinarsi sostituendo w in (2);

2. ξ è radice caratteristica di molteplicità 1. Allora si cerca una soluzione del tipo

$$w(t) = t e^{\alpha t}(Q_1(t) \cos(\beta t) + Q_2(t) \sin(\beta t)),$$

con Q_1 e Q_2 polinomi di grado n da determinarsi come sopra;

3. ξ è radice caratteristica di molteplicità 2. In questo caso deve essere $\beta = 0$. Allora si cerca una soluzione del tipo

$$w(t) = t^2 Q(t) e^{\alpha t}$$

con Q polinomio di grado n da determinarsi come sopra.

9 Studio di funzione

1. Studio di dominio. Osservare se f è pari, dispari, periodica.
2. Calcolare i limiti agli estremi del dominio.
3. Determinare gli eventuali asintoti.
 - (a) Asintoti orizzontali. Se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ allora $y = l$ è asintoto orizzontale.
 - (b) Asintoti verticali. Sia $x_0 \notin \text{dom } f$. Se
 - $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$;
 - $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$,allora $x = x_0$ è asintoto verticale.
 - (c) Asintoti obliqui. Se
 - $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$;
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ con $m \in \mathbf{R}$ e $m \neq 0$;
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = q$ con $q \in \mathbf{R}$,allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo.
4. Determinare la derivata $f'(x)$ e $\text{dom } f'(x)$ (ricordando che $\text{dom } f' \subseteq \text{dom } f$); studiare il segno della derivata prima, determinando gli intervalli di monotonia.
5. Determinare i punti notevoli:
 - (a) Punti di minimo e massimo relativo;
 - (b) Punti di non derivabilità:
 - Punti angolosi. Se f è continua in x_0 , se $f'_\pm(x_0)$ esistono e sono diverse e se almeno una di esse è finita, x_0 è detto punto angoloso.
 - Cuspidi.
 - Flessi a tangenti verticali.
 - (c) Punti di discontinuità (punti di salto, discontinuità eliminabili).
6. Determinare la derivata $f''(x)$; studiare la convessità ($\cup$) e concavità ($\cap$) (se $f'' > 0$ si ha convessità; se $f'' < 0$ si ha concavità).